

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Φυλλάδιο Ασκήσεων 6

Άσκηση 1. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{στο } [0, 1] \times [0, 1] \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) + 3 \sin(4\pi x), & u(0, y) = u(x, 1) = u(1, y) = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 2. Δείξτε το πρόβλημα συνοριακών τιμών *Dirichlet* σε ορθογώνιο $D = (0, a) \times (0, b)$:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{στο } D \\ u = h, & \text{στο } \partial D \end{cases}$$

ανάγεται στην περίπτωση που η h μηδενίζεται στις 3 από τις 4 πλευρές του ορθογωνίου. Υποθέστε πρώτα ότι η h μηδενίζεται στις κορυφές του ορθογωνίου και έπειτα στη γενική περίπτωση θεωρήστε το πρόβλημα

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & \text{στο } D \\ v = h - p, & \text{στο } \partial D \end{cases}$$

όπου $p = (ab)^{-1} [h(0, 0)(x - a)(y - b) - h(a, 0)x(y - b) - h(0, b)(x - a)y + h(a, b)xy]$.

Άσκηση 3. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών *Neumann*:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{στο } D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g, & \text{στο } \partial D \end{cases}$$

σε φραγμένο και συνεκτικό χωρίο D με ομαλό σύνορο.

(i) Δείξτε ότι αναγκαία συνθήκη για να έχει λύση είναι

$$\iint_D f dA = \int_{\partial D} h ds$$

(ii) Δείξτε ότι η διαφορά 2 λύσεων u_1, u_2 είναι σταθερά.

Άσκηση 4. Προσδιορίστε τη λύση $u(x, y) = u(r, \theta)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{στο } D(0, \frac{1}{2}, 1) \\ u(1, \theta) = 2, \quad u(\frac{1}{2}, \theta) = 1, & \text{για κάθε } \theta \in [0, 2\pi] \end{cases},$$

όπου $D(0, \frac{1}{2}, 1) = \{\frac{1}{2} < r < 1\}$ και (r, θ) πολικές συντεταγμένες.

[Υπόδειξη: Αναζητήστε ακτινική λύση $u(r, \theta) = u(r)$.]

Άσκηση 5. Προσδιορίστε τη λύση $u(x, y) = u(r, \theta)$ του προβλήματος

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{στο } D(0, a) \\ u(a, \theta) = \cos^2 \theta, & \text{για κάθε } \theta \in [0, 2\pi] \end{cases},$$

όπου $D(0, a)$ ο δίσκος με κέντρο το 0 και ακτίνα a , κάνοντας χρήση του τύπου του *Poisson*.